Математика Л-230911 16.12.2023

Урок №66

Тема: Алгоритм исследования функции и построения ее графика с помощью производной.

Сдать в срок до 17.12.2023

Глоссарий по теме

Асимптота графика функции y = f(x) – прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки (x, f(x)) до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Возрастание функции. Функция y=f(x) возрастает на интервале X, если для любых x_1и x_2, $x_1 > x_2$ из этого промежутка выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$. Другими словами – большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Выпуклость вверх. Функция выпукла вверх, если, соединив любые две точки ее графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит выше проведенного отрезка.

Выпуклость вниз. Функция выпукла вниз, если, соединив любые две точки ее графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит ниже проведенного отрезка.

Максимум функции. Значение функции в точке максимума называют максимумом функции.

Минимум функции. Значение функции в точке минимума называют минимумом функции.

Производная (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, которое характеризует скорость изменения функции (в конкретной точке).

Производная второго порядка (вторая производная). Производная второго порядка есть первая производная от производной первого порядка.

Производную определяют, как предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к 0, если такой предел существует.

Точка максимума функции. Точку x_0называют точкой максимума функции y = f(x), если для всех x из ее окрестности справедливо неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Точка минимума функции. Точку x_0 называют точкой минимума функции y = f(x), если для всех x из ее окрестности справедливо неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Точка перегиба. Точки, в которых выпуклость вверх меняется на выпуклость вниз или наоборот, называются точками перегиба.

Точки экстремума функции. Точки минимума и максимума называют точками экстремума.

Убывание функции. Функция y=f(x) убывает на интервале X, если для любых x_1 и x_2 ,$x_1 > x_2$ из этого промежутка выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Другими словами – большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Теоретический материал для самостоятельного изучения

Функция *выпукла вниз*, если, соединив любые две точки ее графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит *ниже* проведенного отрезка.

Функция *выпукла вверх*, если, соединив любые две точки ее графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит *выше*проведенного отрезка.

Полная схема построения графика функции:

Найти область определения функции D(f).

Исследовать функцию на четность (найти f(-x)).

Найти асимптоты.

Найти стационарные и критические точки.

Найти промежутки монотонности.

Найти интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз.

Найти точки перегиба

Составить таблицу значений функции для некоторых точек.

По полученным данным построить график функции.

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

Пример 1. Постройте график функции у = $x^3 - 3x + 3$, используя краткую схему построения. схему построения.

Решение:

1) D(y) = (-∞; +∞)

2) Функция не является ни четной, ни нечетной, т. к. $f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x)$

3) Асимптот нет

4) f’(x) = $3x^2 - 3$, f’(x) = 0 при x = 1, x = -1.

x = 1, x = -1 – стационарные точки.

5) f’(x)>0 при $x \in (-\infty; -1), x \in (1; +\infty)$. Так как в точках x = 1, x = -1 функция непрерывна, то эти точки также включаются в промежутки возрастания.

f’(x)<0 при $x \in (-1; 1)$. Так как в точках x = 1, x = -1 функция непрерывна, то эти точки также включаются в промежутки убывания.

6) Так как в точке x = -1 производная меняет знак с «+» на «-», то x = -1 – точка максимума.

Так как в точке x = 1 производная меняет знак с «-» на «+», то x = 1 – точка минимума.

7) Результаты исследования представим в виде таблицы.

	(-∞; -1)	1	(-1; 1)		(1; +∞)
’(x)	+		-		+
	↗		↘		↗

(x)					
		ax		in	

8) Координаты некоторых точек:

	2		
(x)			

9) По полученным данным строим график (рис. 1)

Рисунок 1 – график функции $y = x^3 - 3x + 3$

Пример 2. Постройте график функции $y = x + \frac{1}{x-1} - 3$, используя подробную схему построения. схему построения.

Решение:

1) $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

2) Функция не является ни четной, ни нечетной, т. к. $f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x)$

3) x = 1 – вертикальная асимптота

4) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2}$, f'(x) = 0 при x = 2, x = 0.

x = 2, x = 0 – стационарные точки.

5) f'(x)>0 при $x \in (-\infty;\ 0), x \in (2;\ +\infty)$. Так как в точках x = 0, x = 2 функция непрерывна, то эти точки также включаются в промежутки возрастания.

f'(x)<0 при $x \in (0; 1), x \in (1; 2)$. Так как в точках x = 0, x = 2 функция непрерывна, то эти точки также включаются в промежутки убывания.

Так как в точке x = 0 производная меняет знак с «+» на «-», то x = 0 – точка максимума.

Так как в точке x = 2 производная меняет знак с «-» на «+», то x = 2 – точка минимума.

x = 1 – не является точкой экстремума

6) Найдем интервалы выпуклости функции.

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$f'' < 0$ при $x < 1$; при $x \in (-\infty; 1)$ функция выпукла вверх.

$f'' > 0$ при $x > 1$; при $x \in (1; +\infty)$ функция выпукла вниз.

7) Результаты исследования представим в виде таблицы.

x	(-∞; 0)		(0; 1)	1	(1; 2)		(2; +∞)
f'(x)	+		-	Не сущ.	-		+
f''(x)	-		-	Не сущ.	-		+
f(x)	↗	4	↘	Не сущ.	↘		↗
		ax				in	

8) Координаты некоторых точек:

	1	,5	,5	
(x)	4,5	4,5	,5	,5

9) По полученным данным строим график (рис. 2)

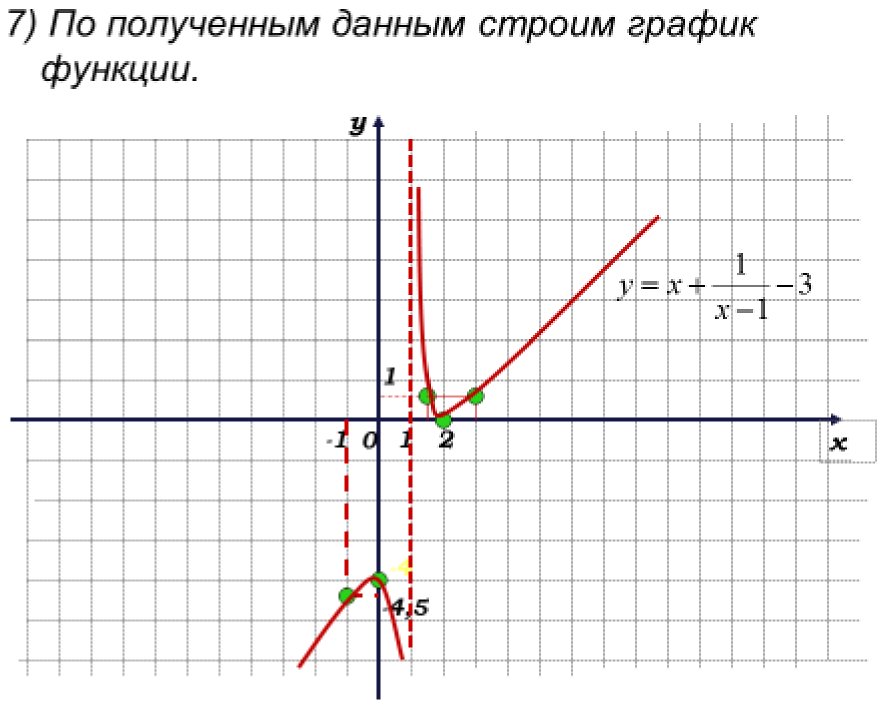

Рисунок 2 – график функции $y = x + \frac{1}{x - 1} - 3$

Домашнее задание:

Конспект

п.24 №296 б)